MATEMÁTICAS PARA TODOS

FMED

Educación y Desarrollo

Año 13, Número 135, noviembre de 2013

EN ESTE BOLETÍN:

INTRODUCCIÓN

En muchas ocasiones nuestros alumnos nos preguntan "para qué sirve aprender matemáticas más allá de los números y las operaciones fundamentales", si rara vez usamos en la vida diaria. Las respuestas que damos no siempre son contundentes, pues la verdad no apreciamos en esta disciplina en todo lo que vale hasta que la necesitamos o descubrimos su grandeza en el desarrollo de la humanidad.

Uno de los hechos que nos permiten apreciar la grandeza y utilizad de las matemáticas es la geometría analítica, en las que por medio de unos ejes cartesianos y el álgebra podemos plantear ecuaciones de curvas. Por estos motivos y aprovechando que el Ingeniero Rogelio Enrique Lara Martínez nos compartió cinco de sus magníficas investigaciones sobre diversos temas de la geometría es que en este boletín tratamos algunos temas relacionados con la geometría analítica, pero desgraciadamente debido al espacio nos será imposible presentar todas ellas. Por ello al final de las tres secciones escritas por el Ing. Lara damos su correo para que puedan obtener mayor información al respecto

Para saborear más las investigaciones y entenderles mejor, también se incluye en este número una brevísima explicación sobre la geometría analítica aplicada a la deducción de una de las curvas más conocidas: la parábola.

LA GEOMETRÍA ANALÍTICA

Como antes se mencionó la geometría analítica y el álgebra nos permiten determinar las ecuaciones de aquellas curvas que responden a un patrón definido. Todas las curvas conocidas como cónicas responden a patrones definidos, por lo que a todas las podremos representar geométricamente (un dibujo) y algebraicamente (una ecuación). Se llaman cónicas porque se generan al cortar con un plano a un cono. Observe la siguiente figura.

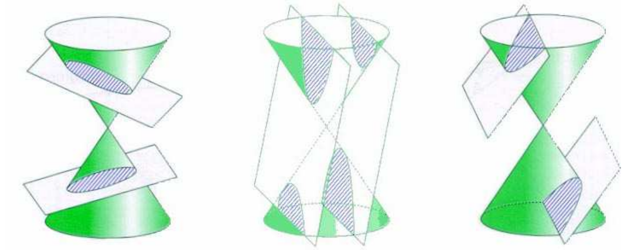


Imagen obtenida de Wikipedia

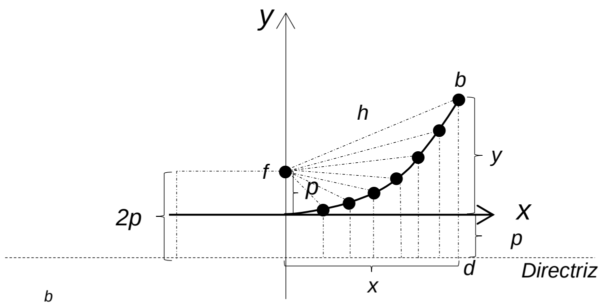
En la siguiente tabla se presentan las principales cónicas y la regla con la que se pueden construir.

Curva	Regla para su generación
Circunferencia	Se forma con el conjunto de puntos que equidistan a un punto llamado centro.
Elipse	Figura generada por los puntos que se localizan a la distancia constante que se obtiene de la suma de los espacios que hay del punto a los lugares llamados foco.
Parábola	Curva formada con los puntos que equidistan de un punto fijo llamado foco, y de una recta llamada directriz.
Hipérbola	Se forma por los puntos del plano cuya diferencia de distancias a los focos, es constante y menor que la distancia entre los focos

Dado que es muy difícil explicar la geometría por medio de textos como los de arriba y que esta materia trata de las figuras, a continuación por medio de imágenes se presenta un ejemplo de lo antes señalado.

Construcción de la parábola.

> **"La inteligencia es lo que usas cuando no sabes qué hacer."**
>
> *Jean Piaget*

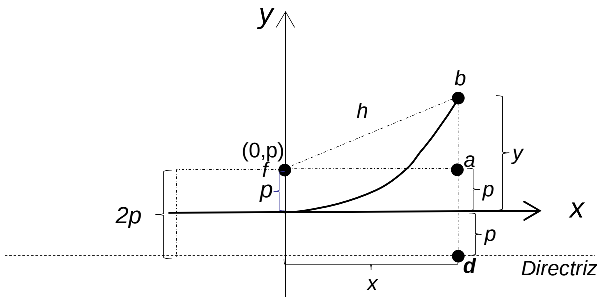


Observen cómo se va construyendo la parábola con los puntos. Estos son equidistantes dado que la distancia del foco *(f)* a los puntos *(b)* son las mismas que las de *b* a los puntos *d*. Algebraicamente esto es:

$$\overline{fb} = h$$

$$\overline{bd} = y + p$$
$$h = y + p$$

Para deducir la fórmula algebraica observe el siguiente dibujo y el desarrollo.



Del triángulo Δ*fba* se tiene:

$$x^2 + (y - p)^2 = h^2$$

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = h\text{-----}1$$

De la definición de la parábola se tiene:

$$h = y + p\text{------------------- } 2$$

Sustituyendo 2 en *1*:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = (y + p)$$

Simplificando.

$$x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2$$

$$x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2yp + p^2 = y^2 + 2yp + p^2$$

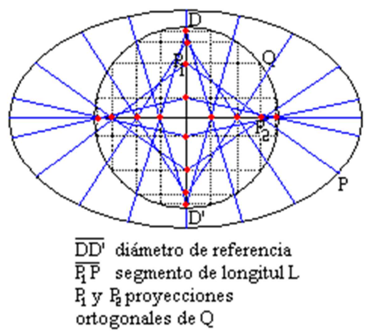
$$x^2 = 4yp$$

Con esto nos damos cuenta de que efectivamente la geometría analítica nos permite construir curvas y que éstas puedan ser expresadas por medio de ecuaciones.

Una parte muy importante de la geometría analítica es la investigación, por medio de ella se logran resultados sobre el estudio de diferentes figuras y su relación con resultados gráficos o fenómenos naturales. Como se mencionó al inicio de este boletín, el **Ing. Rogelio Enrique Lara Martinez** tiene varias investigaciones relacionadas sobre este tema las cuales son muy interesantes, pero lo más importante para nuestro boletín es que nos ha permitido compartirlas. Desgraciadamente por el espacio no podemos incluir todas las que nos mandó, sólo incluimos 3 de las seis que nos envió, pero al final damos su correo para que quienes así lo deseen le soliciten toda su investigación.

CIRCUNFERENCIA GENERATRIZ DE LA ELIPSE

Construcción: Se traza una circunferencia de radio **R** y dos diámetros que se encuentran perpendiculares, uno vertical y otro horizontal. Cualquier punto de la circunferencia se proyecta ortogonalmente sobre sus diámetros. Por las proyecciones de un punto de la circunferencia, se traza un segmento rectilíneo de longitud **L** mayor que el radio **R**, uno de los diámetros será el origen que se tome como referencia de aquí partirán los segmentos de igual longitud y pasarán por la otra proyección, si se trazan suficientes segmentos para un número considerables de proyecciones de puntos de la circunferencia, y se unen los extremos libres de las segmentos, se obtiene la poligonal cerrada que forma la elipse, como se ve en la figura.



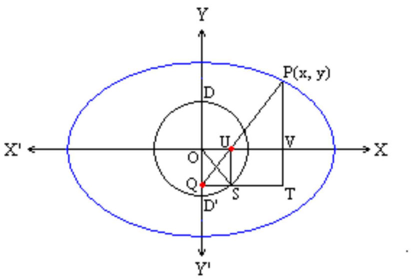
Los siguientes términos son importantes para entender el comportamiento de otras curvas de mayor grado:

Proyecciones ortogonales.- *Son puntos en los ejes de coordenadas, proyectados perpendicularmente de un punto del plano cartesiano.*
Radialidad.- *Concepto que se aplica a una curva plana cerrada donde uno o dos segmentos rectilíneos de longitud diferente que representan radios, giran colinealmente superpuestos con un extremo común. El centro de giro puede ser fijo o variable.*
Radialidad circular.- *Es el segmento rectilíneo (radio) que gira por uno de sus extremos y el otro extremo traza una curva plana cerrada. El centro de giro puede ser fijo o variable. El caso más simple es la circunferencia.*
Radialidad elíptica.- *Son dos segmentos rectilíneos (radios) de diferente longitud y superpuestos colinealmente con un extremo común que giran en un centro variable que puede ser una recta o una curva plana cerrada.*
El caso más simple es la elipse.
Interceptor Ortogonal.- *Son las proyecciones ortogonales de los extremos libres de los segmentos rectilíneos (radios) superpuestos colinealmente y generan la curva, se aplica a la radialidad circular.*
El caso más simple se tiene en dos circunferencias

ELIPSE: OTRA DEFINICIÓN

Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que dos distancias (los semiejes) colineales y superpuestas a las proyecciones ortogonales de un punto de una circunferencia sobre dos diámetros perpendiculares son constantes.

En la circunferencia generatriz, cualquiera de los diámetros, se toma como directriz. En la figura siguiente se toma el diámetro vertical como directriz, de donde parten los segmentos al punto de la elipse.



Elementos de la elipse

$$\overline{PQ} = a \text{ semieje mayor} — A$$
$$\overline{PU} = b \text{ semieje menor} — B$$
$$\overline{QU} = \overline{OS} = R \text{ radio}$$

De lo anterior se obtiene:

$$\overline{QU} = \overline{PQ} - \overline{PU} - -C$$

Sustituyendo en C

$$R = a - b \; - - - - G$$
$$\overline{QT} = x - - - - - - \; E$$
$$\overline{PV} = y \; - - - - - - F$$

$\Delta\, \boldsymbol{PQT} \sim \Delta\, \boldsymbol{QUS}$

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{QU}} = \frac{\overline{QT}}{\overline{QS}} \quad \text{--------I}$$

Sustituyendo A, E, G en I

$$\frac{a}{a-b} = \frac{x}{\overline{QS}}$$

$$\overline{QS} = \frac{R}{a}\, x \quad \text{-------------------II}$$

$\boldsymbol{\Delta\, PUV} \sim \boldsymbol{\Delta\, QUS}$

Sustituyendo B, F y G en III

$$\frac{b}{a-b} = \frac{y}{\overline{US}} \quad \rightarrow \overline{US} = \frac{R}{b} y \text{ ----IV}$$

$\boldsymbol{Del}\ \Delta\, \boldsymbol{QUS}$

$$\overline{QS}^2 + \overline{US}^2 = \overline{QU}^2 \quad \text{------------V}$$

Sustituyendo II y IV en V

$$\left[\frac{R}{a}x\right]^2 + \left[\frac{R}{b}y\right]^2 = R^2$$

Simplificando

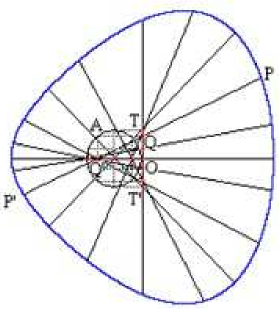
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ecuación canónica de la elipse

EL OVO CIRCULAR

Construcción: Se traza una circunferencia y un segmento directriz tangente de longitud (**d)** igual al diámetro, las proyecciones ortogonales de los puntos de la circunferencia se recogen en su diámetro y en el segmento directriz tangente. Se trazan segmentos rectilíneos de longitud (**L)** constante que tienen como puntos comunes las proyecciones, siendo el centro de los segmentos rectilíneos (**L**) los puntos de la directriz tangente, si se toma un número considerable de segmentos rectilíneos, y se unen sus extremos en una poligonal cerrada, se genera la curva que se muestra en la siguiente figura:

“La mayoría de las personas son como alfileres: su cabeza es lo más importante.”
Jonathan Swift



TT’ es el segmento directriz tangente, centro variable de todos los segmentos de longitud L QQ’ proyecciones ortogonales de A. PP’ segmento de longitud L con centro en QO centro geométrico del ovo.

El ovo circular es una deformación de la elipse al hacer una traslación de uno de sus ejes de proyección a una posición tangente a la circunferencia generatriz.

Para obtener el ovo es importante que la relación de los segmentos rectilíneos cumplan una relación mínima de *5* a *2* con relación al diámetro de la circunferencia generatriz.

Deducción de su fórmula

De la figura se observa:

$\overline{AA'} = d$ Directriz tangente

$\overline{PV} = R$ -----------i

$\overline{OB} = d$ ---------- ii

$\overline{VT} = \overline{OQ} = x$ ------iii

$\overline{PQ} = y$ ----------- iv

Δ OCS ~ ΔVPT

$$\frac{\overline{PV}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{VT}}{\overline{OS}} \text{ ---------v}$$

Sustituyendo en v i y ii

$$\frac{R}{\overline{OC}} = \frac{x}{\overline{OS}} \rightarrow \overline{OS} = \frac{\overline{OC}}{R}x \text{ --- } vi$$

ΔOBC ~ Δ VPT

$$\frac{\overline{VT}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{PV}}{\overline{OB}} \text{ ------------vii}$$

Sustituyendo i, ii y iii en vii

$$\frac{x}{\overline{OC}} = \frac{R}{d} \rightarrow \overline{OC} = \frac{d}{R}x \text{ ------viii}$$

De vi y viii

$$\overline{OS} = \frac{d}{R^2}x^2 \text{ -----------ix}$$

Del Δ PQS

$$\overline{QS}^2 + \overline{PQ}^2 = \overline{PS}^2 \text{ ------x}$$

$$\overline{QS} = \overline{OS} + \overline{OQ} \text{ ------------------xi}$$

Sustituyendo iii y ix en xi

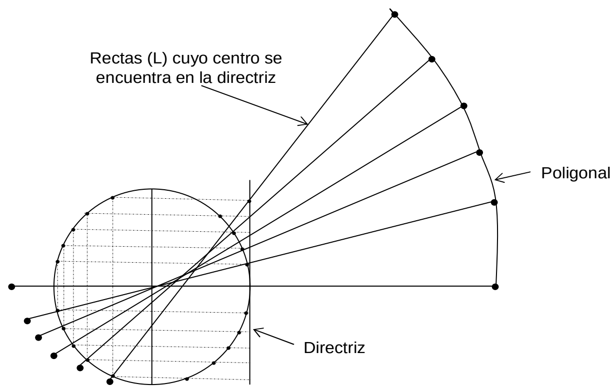
$$\overline{QS} = \frac{d}{R^2}x^2 + x \text{ --------------xii}$$

Ecuación canónica del ovo circular

Es importante señalar que esta ecuación representa una familia: ovo, lazo y la gota que son curvas de transición pues al variar los parámetros **d** y **R** sus relaciones determinan excentricidad, pues al tender a **d** a cero la ecuación se convierte en una circunferencia.

*Para mayor información sobre estos apartados, favor de escribir al **Ing. Rogelio Enrique Lara Martínez** rolara_5@yahoo.com.mx*

Como apoyo para la construcción del Ovo presentamos la siguiente gráfica en la que se observa cómo se va formando, aunque no se cumple la condición de que *L* sea *5* a *2* con relación del diámetro. También me permito aclarar que cuando se habla de radialidad se refiere al movimiento que puede tener un segmento para que uno de los extremos trace la curva.



Construcción de un Ovo

Problemas del calendario

Martes 12. ¿Cuáles números reales satisfacen la ecuación $2x^2 - 2x = 2x\sqrt{x^2 - 2x}+1$?

Miércoles 20. Si *10a* + *b* es un múltiplo de *7*, ¿es el nínmero *a* – *2b* mútiplo de *7*?

Matemáticas para todos. Año 13, número 135, noviembre de 2013. Periodicidad: diez números al año. **Editor responsable:** Alfonso Ramón Bagur. **Nº de Certificación de reserva de derechos al uso exclusivo de título:** 04-2000-0829110600-106. **Certificado de licitud de título:** Núm. 11423. **Certificado de licitud de contenido:** Núm. 8018. **Publicación en formato electrónico elaborado y distribuido por:** Educación y Desarrollo, A.C. **E-mail**: fdomexia@prodigy.net.mx. Página web: www.educacion.org.mx

Consejo Editorial: • Radmila Bulajich Rechtman • Roger Díaz de Cossío • Fernando Solana. **Tel:** 5623-3500 ext. 1207 **E-mail:** **alfonso@aprendizaje.com.mx**