F M E D

Educación y Desarrollo

Año 13, Número 132, agosto de 2013

MATEMÁTICAS PARA TODOS

EN ESTE BOLETÍN:

JUANJO

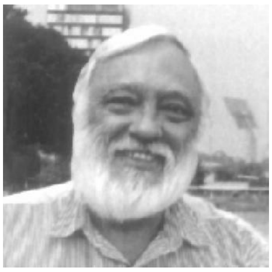
Estimados lectores, tomo unos minutos de su valioso tiempo para recordar al primer editor de este boletín, el Dr. Juan José Rivaud Morayta (Juanjo): gran amigo, conversador profesor y chef. El 9 de agosto de 2005 murió en Barcelona de un mal hepático.

Hago una breve descripción de Juanjo, a quien recordamos con respeto, cariño y sentimiento.

Egresó de la UNAM, realizó el doctorado en Matemáticas en Northwestern University, posdoctorado en el Institute for Advance Studies en Princeton, New Jersey. Su interés por la enseñanza matemática lo condujeron a estudiar sobre la problemática de la Epistemología de las Matemáticas.

Investigador en la Sección de Metodología y Teoría de la Ciencia del CINVESTAV. Miembro de la Sociedad Matemática Mexicana, de la Sociedad Mexicana de Divulgación de la Ciencia y la Técnica y, del Seminario de Cultura Mexicana.

En 1998 se le otorgó el premio Nacional de Divulgación de la Ciencia: Alejandra Jaidar.



Juan José Rivaud Morayta (1943-2005)
Imagen obtenida de
www.math.cinvestav.mx/50/academico

CÁLCULO COMBINATORIO

El aprendizaje de las matemáticas por lo regular se da en la escuela, pero el que no se practiquen casi siempre nos lleva a su olvido. Por ello es muy recomendable que lo que se enseña en los cursos de matemáticas esté siempre relacionado con la vida cotidiana y que se aplique lo más seguido posible, sobre todo lo aprendido en primaria, secundaria y bachillerato.

El cálculo combinatorio es un caso de éstos, en que lo entendemos, lo aprendemos y como no lo practicamos se nos olvida. Esto no sucedería si lo practicamos y lo relacionamos con la vida diaria.

En este número de nuestro boletín vamos a recordar algunos principios de esta herramienta matemática.

El cálculo combinatorio nos permite calcular de cuántas maneras podemos agrupar un determinado número de elementos, cumpliendo algunas normas y características los objetos a combinar.

Existen tres tipos de combinatorias:

a) La permutación
b) La variación
c) La combinación

PERMUTACIONES

Las permutaciones permiten conocer el número de manearas diferentes en las que un conjunto de elementos pueden ser ordenados. En este cálculo se destaca la palabra <u>orden</u>, por ejemplo en las permutaciones de los elementos a, b, c no es lo mismo: *a,b,c* que *a,c,b* ó *b,a,c* ó *b,c,a* ó *c,a,b* ó *c,b,a*. Si hacemos el ejercicio con dígitos nos damos cuenta de la importancia que esto tiene.

¿De cuántas maneras diferentes podemos combinar los números 3, 4, 5, sin que estos se repitan en cada formación?

3, 4, 5	*3, 5, 4*	*4, 3, 5*
4, 5, 3	*5, 3, 4*	*5, 4, 3*

También la pregunta podría haber sido: *¿cuántos números de tres cifras podemos formar con los dígitos 3, 4 y 5?* No es válida la repetición de números en una terna. El resultado será:

> **"La sabiduría es un adorno en la prosperidad y un refugio en la adversidad."**
>
> *Aristóteles*

> **“La sabiduría no nos es dada, debemos descubrirla por nosotros mismos tras un viaje que nadie puede evitarnos ni recorrer por nosotros.”**
>
> *Marcel Proust*

345	*354*	*435*
453	*534*	*543*

Ustedes me darán la razón de que no es lo mismo *345* que *354* ó *435*, no obstante que tienen los mismos dígitos.
Ésta fue una permutación simple, pero podríamos permitir la repetición de los elementos y las celdas lo que quedaría así:

333	*334*	*335*	*343*	*353*	*344*	*355*
444	*443*	*445*	*454*	*434*	*433*	*455*
555	*553*	*554*	*535*	*545*	*533*	*544*

Si sumamos las 6 celdas anteriores a estas 21, nos damos cuenta que son *27* números diferentes, obtenidos por la permutación de tres números *(3, 4 y 5)* en los que sí se permite la repetición.
Lo importante en las matemáticas es que nos pueden ahorrar el tener que hacer estas tablas para calcular el número de ternas, busquemos una fórmula para ello.
Partamos de la idea de que en una permutación simple (no hay repetición) sus *n* elementos, en orden, van a ser ubicados en diferentes posiciones, esto implica que en un inicio tendremos *n* lugares, luego tendremos *n-1, n-2* y así sucesivamente hasta llegar a *1*, lo que puede representar de la siguiente manera:

$$(n)(n-1)(n-2)\ldots..(1)=n!$$

Ahora veamos si esto es verdad, con el nuestros tres *(3, 4, 5)* números. El número de ordenamientos sin repetición, será es el factorial de tres:

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Lo que valida la fórmula
Veamos qué pasa con una permutación compleja (repetición de elementos).
Como debemos colocar los *n* elementos en *n* número de ordenamientos, podemos plantear la siguiente ecuación:

$$(n)(n)(n)\ldots(n\ veces)=n^n$$

Veamos si la fórmula funciona con nuestros tres elementos *(3, 4, 5).*

$$n^n = 3^3 = 27$$

Efectivamente obtenemos los 27 ordenamientos con repetición de elementos.
No debemos olvidar que en las permutaciones:

$$a,b,c \neq a,c,b \neq b,a,c\ etc.$$

Las variaciones

En las variaciones *(V)* el cálculo es de la cantidad de ordenamientos que se pueden realizar, pero de sólo unos cuantos elementos *(k)* de un conjunto *(n)*, ellas siempre teniendo en cuenta el orden. Por ejemplo, Tengo cuatro números *(0, 1, 2, 3)* y me pregunto: *¿cuántos números diferentes puedo formar con dos de ellos, primero sin repetirlos (variación simple) y luego cuántos con repetición (variación compleja)?*
Observe que como se nos pide que tomemos en cuenta el orden de los elementos: *a, b ≠ b, a.*
Después de esta consideración que caracteriza a las variaciones, podremos definir las duplas de dígitos:

01	*02*	*03*	*12*	*13*	*23*
10	*20*	*30*	*21*	*31*	*32*

Doce duplas diferentes.
Ahora veamos cuántas podemos formar repitiendo elementos, o sea una variación compleja.

00	*11*	*22*	*33*

Al sumar las dos tablas en total tenemos 16 duplas diferentes. Esto es al realizar la variación de 4 elementos *(n)* tomados de dos en dos *(k)* y permitiendo las repeticiones tenemos 16 duplas.
Lo anterior lo podemos representar de la siguiente manera.

$$V_k^n = V_2^4 = 16\ Con\ repetición\ de\ elementos$$

Esto se lee así: Variación de *4* elementos tomados de dos en dos, permitiendo la repetición.
Para encontrar un camino menos laborioso, busquemos una fórmula de cálculo de las variaciones.
Al igual que en las permutaciones tendremos la posibilidad de:

$$(n)(n-1)(n-2)(n-3)\ldots.(1)=n!$$

Pero como estamos sólo k elementos tendremos que dividir dichas combinaciones entre $(n-k)!$, con lo que la ecuación nos queda así:

$$V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}\ Esto\ sin\ repetición$$

Probemos nuestra fórmula:
Tenemos cuatro amigos a, b, c, d y de ellos debemos seleccionar dos para ir de viaje. ¿Cuántos pares puedo formar?
Por el tipo del problema nos damos cuenta de que no se pueden repetir los elementos, por ello es una variación simple (sin repetición). Aplico la fórmula a ver qué resultado obtengo.

$$V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{24}{2} = 12$$

> **“Las inteligencias poco capaces se interesan en lo extraordinario; las inteligencias poderosas, en las cosas ordinarias”**
>
> *Victor Marie Hugo*

Nos damos cuenta de que efectivamente el número de ordenamientos sin repetición son doce.

a,b	*a,c*	*a,d*	*d,c*	*b,c*	*b,d*
b,a	*c,a*	*d,a*	*c,d*	*c,b*	*d,b*

En una variación con repetición (Variación compleja) podremos hacer variaciones desde n hasta *n-k,* por lo que podemos plantear *n* a la *k* variaciones.

$$V_k^n = (n)(n)(n)(n)\ldots(n-k) = n^k$$

Veamos el resultado de aplicar la fórmula de variaciones con repeticiones.

$$V_2^4 = 4^2 = 16$$

Vemos que efectivamente, con repeticiones tenemos la posibilidad de 16 ordenamientos diferentes.

a,b	a,c	a,d	d,c	b,c	b,d	a,a	b,b
b,a	c,a	d,a	c,d	c,b	d,b	c,c	d,d

Recordemos que las características de las variaciones son dos:

- Toman en cuenta el orden de los elementos: a,b≠ b, a
- Sólo ordenan una parte de los elementos del conjunto: k<n.

LAS COMBINACIONES

En las combinaciones <u>no se toma en cuenta el orden</u> de los elementos, esto implica que a, b = b, a. En esta herramienta puede haber combinaciones simples en las que los elementos no se pueden repetir o complejas, en las que sí se repiten.

Analicemos un ejemplo. Si tengo cuatro bolas una negra, una blanca, una roja y una verde. ¿Cuántas combinaciones puedo realizar si sólo tomo dos de ellas?

Blanca	Negra	Roja	Verde
a	n	r	v

Este problema se resuelve por medio del cálculo de una combinación de cuatro elementos seleccionados de dos en dos y esto se puede plasmar de la siguiente manera.

$$C\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = C\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 6$$

Al realizar las posibles combinaciones nos damos cuenta que, efectivamente, son seis.

a,n	*a,r*	*a,v*
n,r	*n,v*	*r,v*

En este ejemplo no pude haber repetición, dado que sólo existe una pelota de cada color.

La deducción de la fórmula es muy sencilla, ya que las combinaciones son iguales que las variaciones pero no toman en consideración el orden. Para resaltar más esto, tomemos en cuenta lo siguiente: si tenemos tres elementos a, b, c y realizamos con ellos una variación “abc, acb, bac, cab, bca, cba” son seis arreglos diferentes, pero si los combinamos es uno sólo.

Otro ejemplo sería: supongamos que tenemos los elementos a, b, c, d y que queremos conocer las combinaciones que se pueden formar con sólo dos elementos de los cuatro.

Lo primero que podemos hacer el calcular todas las duplas como si fuera una variación o sea en las que el orden sí importa.

a,b	*a,c*	*a,d*	*d,c*	*b,c*	*b,d*
b,a	*c,a*	*d,a*	*c,d*	*c,b*	*d,b*

Son doce, ahora quitemos una de la duplas que tienen los mismos elementos, ya que para las combinaciones son lo mismo.

a,b	*a,c*	*a,d*	*d,c*	*b,c*	*b,d*
~~*b,a*~~	~~*c,a*~~	~~*d,a*~~	~~*c,d*~~	~~*c,b*~~	~~*d,b*~~

El resultado es seis como ya lo habíamos visto.

Para obtener la fórmula para el cálculo de un número de combinaciones de k elementos escogidos de un conjunto de n, podemos partir de la fórmula de las variaciones, pero habrá que dividirla entre el factorial de k (número de elementos que vamos a combinar). Esto debido a que el factorial de *k* *((k)(k-1)(k-2)(k-3)…(1)=k!)*, arroja el número de sin repetición de los k elementos. La fórmula para el cálculo de combinaciones sin repetición es:

$$C\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Probemos con el ejemplo de las pelotas de colores, en donde *n* = 4 y *k* = 2.

$$C\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{24}{4} = 6$$

La fórmula es correcta.

> **"La creatividad es más que ser diferente. Cualquiera puede hacer extravagancias, eso es fácil, lo difícil es ser tan simple como Bach."**
>
> *Charles Mingus*

Para el cálculo de las combinaciones con repetición la fórmula para su cálculo es:

$$C\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

Hagamos la misma combinación de las pelotas de colores, sólo que ahora permitiendo repetir los elementos. Para que esto suceda es necesario que cada vez que seleccionemos dos pelotas las volvamos al recipiente en que se encuentran.

a,n	*a,r*	*a,v*	*aa*	*nn*
n,r	*n,v*	*r,v*	*rr*	*vv*

Probemos la fórmula.

$$C\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{(4+2-1)!}{2!\,(4-1)!} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{120}{12} = 10$$

La fórmula funcionó.

El cálculo combinatorio puede aplicarse en muchos campos, en el que destaca es el de la probabilidad.

Reflexión sobre las tripletas

El profesor Simón Pedro Herrera Pardo, hace una reflexión sobre el uso de los inversos de dos números pares o de dos números nones, ambos consecutivos para encontrar una tripleta pitagórica. A continuación la presento tal y como lo reflexionó, sólo con pequeñas modificaciones de estilo.

Por medio del presente estoy tratando de atender el problema de las ternas pitagóricas, presentado en el boletín del mes de junio.

1. *Se menciona en dicho documento que para formar una terna pitagórica, se proponen dos números impares consecutivos, o dos pares consecutivos para luego sumar sus inversos…*
2. *Al estar en ello, observé que no es necesario trabajar con los inversos y llegué a que si se proponen dos números impares consecutivos, o dos números pares consecutivos, se suman dichos números para encontrar el valor de uno de los catetos y luego se multiplican para encontrar el otro cateto, usando el teorema de Pitágoras se encuentra la hipotenusa y por lo tanto la triada pitagórica.*

Ejemplos.

Impares 15 y 17. *Un cateto la suma de los dos números: 15+27=32. El otro cateto es el producto: 15x32= 255.*

Al aplicar Pitágoras tenemos $\sqrt{32^2+255^2}$ *= 257.*

Pares 30 y 32. *Cateto 1: 30+32=62. Cateto 2: 30 x 32 = 960. Hipotenusa 962.*

Además se cumple que la hipotenusa se obtiene sumando dos unidades al cateto mayor.

¿Por qué se cumple? Me propongo demostrarlo algebraicamente.

Para números pares, sean (2n) y (2n+2), se suman para un cateto y se multiplican para el otro.

Cateto 1: (4n+2); Cateto 2: ($4n^2$+4n); La hipotenusa obtenida con la suma de dos al cateto mayor: ($4n^2$+4n+2)

Ahora con Pitágoras: La suma de los cuadrados de los catetos es $(4n+2)^2+(4n^2+4n)^2=16n^4+32n^3+32n^2+16n+4$.

El cuadrado de la hipotenusa: $16n^4+32n^3+32n^2+16n+4$.

Que como se ve se cumple la igualdad del teorema de Pitágoras.

En el caso particular de n=1, se obtiene la terna 6,8 y 10. Lo que dividido entre 2, nos da la típica terna: 3,4 y 5.

Para los números impares.

Sean los números (2n+1) y (2n+3). Cateto 1: se suman los dos números (2n+1) + (2n+3) = (4n+4); Cateto 2, que se obtiene al multiplicar los dos números impares: (2n+1) + (2n+3) = ($4n^2$+8n+3).

La hipotenusa ($4n^2$+8n+5).

Al realizar la suma de los cuadrados de los catetos y al elevar al cuadrado la hipotenusa en ambos resultados se obtiene: $16n^4+64n^3+104n^2+80n+25$. Lo que satisface la hipótesis.

Esperando que estemos en lo correcto.

Por su atención de antemano muchas gracias.

Simón Pedro Herrera Pardo.

En realidad quienes le damos las gracias al Profesor Simón Herrera Pardo somos nosotros, pues nos ayudó a explicar mejor nuestro planteamiento.

Problemas del calendario

Viernes 9. Un jardinero plantó 7 árboles de aguacate, de forma que hay 6 filas con 3 árboles cada una ¿Cómo acomodó los árboles?

Jueves 29. ¿Cuántos enteros positivos de 3 dígitos tienen la propiedad de que su dígito central es el promedio de los otros dos?

FMED Educación y Desarrollo

Matemáticas para todos. Año 13, número 132, agosto de 2013. Periodicidad: diez números al año. **Editor responsable:** Alfonso Ramón Bagur. **Nº de Certificación de reserva de derechos al uso exclusivo de título:** 04-2000-0829110600-106. **Certificado de licitud de título:** Núm. 11423. **Certificado de licitud de contenido:** Núm. 8018. **Publicación en formato electrónico elaborado y distribuido por:** Educación y Desarrollo, A.C.
E-mail: fdomexia@prodigy.net.mx. Página web: www.educacion.org.mx

Consejo Editorial: • Radmila Bulajich Rechtman • Roger Díaz de Cossío • Fernando Solana. **Tel:** 5623-3500 ext. 1208 **E-mail:** alfonso@aprendizaje.com.mx